

# Réttmæti samræmdra prófa til að álykta um námsframfarir nemenda milli 4. og 7. bekkjar grunnskóla

Einar Guðmundsson, Sigurgrímur Skúlason  
Námsmatsstofnun  
Guðmundur B. Arnkelsson  
Háskóli Íslands

Markmið rannsóknarinnar er að meta þá forsendu við túlkun námsframfara á samræmdum prófum milli 4. og 7. bekkjar grunnskóla að sömu kunnáttusvið séu mæld með prófunum í báðum bekkjum þrátt fyrir að prófspurningar séu ekki þær sömu. Samræmdar einkunnir 4003 nemenda í 4. og 7. bekk voru þáttagreindar með aðferð mestu líkinda (maximum likelihood) og promax snúningi. Nemendurnir voru allir fæddir árið 1988 og tóku samræmd próf í íslensku og stærðfræði í 4. bekk 1997 og 7. bekk 2000. Þrjú þættir komu fram í þáttgreiningunni: (a) stærðfræði, (b) stafsetning og ritun, (c) lestur og málnotkun. Aðrar aðferðir við þáttgreiningu gagnanna (principal components, principal axis factoring, alpha) gáfu hliðstæðar niðurstöður og greining byggð á aðferð mestu líkinda. Samtals er skýrð dreifing einstakra breyta (communalities) eftir snúning að meðaltali 0,41 og liggur á bilinu frá 0,13 til 0,86 fyrir einstakar breytur. Almenn renna niðurstöðurnar stoðum undir réttmæti þess að nota samræmd próf til að álykta um námsframfarir nemenda yfir þriggja ára tímabil.

Samræmd könnunarpróf í 4. og 7. bekk grunnskóla voru fyrst haldin haustið 1996. Prófað var í stærðfræði og íslensku í þessum bekkjum. Haustið 1999 voru liðin þrjú ár frá fyrstu fyrirlögn samræmdra könnunarprófa. Nemendur sem voru í 4. bekk haustið 1996 tóku því samræmd könnunarpróf í annað sinn haustið 1999 en þá í 7. bekk. Nemendur sem tóku samræmd könnunarpróf í 4. bekk haustið 1997 tóku þau að nýju í 7. bekk haustið 2000.

Með því að tengja saman upplýsingar um frammistöðu sömu nemenda í 4. og 7. bekk er hægt að gera sér grein fyrir hvernig þeim miðar í námi samanborið við jafnaldra þeirra yfir þriggja ára tímabil.

Undanfarin tvö ár hefur verið þróuð leið á Námsmatsstofnun<sup>1</sup> við framsetningu upplýsinga til skóla um framfarir nemenda þeirra í stærðfræði og íslensku (Einar Guðmundsson og Guðmundur B. Arnkelsson, 2001). Við framsetningu þessara upplýsinga og túlkun á framförum nemenda er gert ráð fyrir að prófin séu að mæla sömu kunnáttusvið bæði árin enda er það forsenda þess að breytingar milli prófanna séu réttnefndar framfarir.

Jafnvel þó að prófspurningar séu ekki þær sömu í 4. og 7. bekk er gengið út frá því að heildareinkunn í stærðfræði og íslensku og einkunn fyrir sömu prófþætti í þessum bekkjum endurspeglar sömu kunnáttusvið. Af þessari ástæðu eru eingöngu reiknaðar framfarir

<sup>1</sup> Áður Rannsóknastofnun uppeldis- og menntamála.

nemenda fyrir heildareinkunn í stærðfræði og íslensku og prófþátta sem bera sömu nöfn í báðum bekkjum. Ónákvæmni ályktana um framfarir nemenda í íslensku og stærðfræði í heild fer eftir því að hvaða marki sömu prófþættir eru metnir í 4. og 7. bekk. Á sama hátt fer ónákvæmni ályktana um framfarir nemenda í sömu prófþáttum í 4. og 7. bekk eftir því að hve miklu leyti þeir meta sömu kunnáttusvið í þessum bekkjum.

Með hliðsjón af mikilvægi upplýsinga um framfarir nemenda í einstökum skólum fyrir skólaþróun í landinu er nauðsynlegt að athuga hversu traust sú forsenda er að prófin mæli sömu kunnáttusvið í 4. og 7. bekk. Því var ákveðið að athuga réttmæti þessarar forsendu með formlegum hætti. Þetta er gert með því að þáttgreina einkunnir sömu nemenda í stærðfræði og íslensku í 4. bekk 1997 og 7. bekk árið 2000. Þessi aðferð er notuð til að athuga hvernig efni prófanna raðast saman. Ef spurningar í hliðstæðum prófþáttum í 4. og 7. bekk raðast saman, rennir það stoðum undir þá skoðun að prófþættirnir mæli sömu kunnáttusvið bæði í 4. og 7. bekk. Jafnframt myndi slík niðurstaða renna stoðum undir notkun samræmdra prófa til að álykta um framfarir nemenda milli ára.

Markmið þáttgreiningar er að lýsa gögnum, sem samanstanda af mörgum breytum, með fáum þáttum. Fylgni milli breytanna í gagnasafninu ræður því hverjar þeirra raðast saman í tiltekinn þátt. Jafnframt kemur fram hvernig hver breyta tengist þáttunum.

Nokkrar aðferðir eru vel þekktar til að ákvarða fjölda þátta í þáttgreiningu. Algengast er að miða fjölda þátta við eigingildi hærri en einn (Kaiser-viðmið). Önnur vel þekkt aðferð er að styðjast við skriðupróf við ákvörðun á fjölda þátta. Þegar þessi aðferð er notuð er útbúið línurit þar sem eigingildum þáttafylkisins er raðað eftir stærð. Línuritið sýnir venjulega mikinn mun milli hæstu eigingilda og jafnframt að lægri eigingildi falla á því sem næst beina línu. Aðferðin felst í því að ákvarða fjölda þátta út frá því hvar

brot skilur milli stíganda og samfellu í stærð eigingilda. Minna þekkt aðferð er samhliðagreining (*parallel analysis*). Hún felst í svokallaðri hermigreiningu (*simulation study*). Þegar þessari aðferð er beitt í þáttgreiningu eru búin til fylgnifylki með jafnmörgum breytum. Fylgnifylkin eru þáttgreind og niðurstöðurnar síðan notaðar til leiðbeiningar um fjölda þátta. Loks hafa tölfraðipróf verið notuð til leiðbeiningar um fjölda þátta í tilteknu gagnasafni.

Flestir eru sammála um að aðferð Kaisers við ákvörðun á fjölda þátta í gagnasafni sé ófullnægjandi. Það stafar einkum af því að aðferðin leiðir oftast til ofmats á fjölda þátta í gagnasafni (Zwick og Velicer, 1986). Notkun skriðuprófs til að ákvarða fjölda þátta í gagnasafni hefur einkum verið gagnrýnd fyrir hversu huglægt matið á fjölda þátta getur verið (Gorsuch, 1983; Zwick og Velicer, 1986). Með því að nota bæði skriðupróf og samhliðagreiningu fæst almennt réttari mynd af fjölda þátta í gagnasafni heldur en þegar aðferð Kaisers er notuð ein og sér (Fabrigar, Wegener, MacCallum og Strahan, 1999; Zwick og Velicer, 1986). Þessi leið er því farin í þessari grein við ákvörðun fjölda þátta í samræmdum prófum í 4. og 7. bekk. Þar sem ákvörðun um fjölda þátta felur ávallt í sér óvissu er þessum hluta þáttgreiningar að jafnaði fylgt eftir með athugun á eiginleikum þáttalausna.

Til að túlkun þátta í þáttgreiningu verði einföld og markviss er þáttum snúið. Við snúning eru tengsl breyta og þátta endurskilgreind þannig að sem sterkust tengsl fáiast milli hvernar breytu og eins eða fárra þátta og að allir þættir einkennist af sterkum tengslum við einhverjar breytur á meðan tengsl við aðrar breytur verða veikari.

Margar aðferðir hafa verið þróaðar við snúning á þáttum. Almennt má flokka þessar aðferðir í tvennt eftir því hvort gert er ráð fyrir fylgni á milli þáttanna eða ekki. Þegar þáttum er snúið hornrétt (*orthogonal rotation*) er ekki gert ráð fyrir fylgni á milli þeirra. Þegar fylgni er aftur á móti á milli þáttanna er þeim snúið

undir minna en 90 gráðu horni (*oblique rotation*). Styrkur fyrrnefndu aðferðanna felst í því að einfalt er að túlka óháða þætti. Þegar breytur í þáttgreiningu tengjast nokkrum þáttum geta niðurstöðurnar verið óskýrar. Oft má draga úr þessum vanda með því gera ráð fyrir fylgni á milli breytanna þegar þáttum er snúið. Þá er gert ráð fyrir að hver breyta tengist einum þætti en að fylgni milli þátta skýri tengsl breytunnar við aðra þætti.

Við þáttgreiningu einkunna í samræmdum prófum í 4. og 7. bekk var gert ráð fyrir háðum þáttum við snúning þeirra. Athuganir á samræmdum prófum hafa leitt í ljós að nokkuð sterk fylgni er milli námsþátta í 4. og 7. bekk (Sigurgrímur Skúlason, Finnbogi Gunnarsson og Helga Kristinsdóttir, 2001a, 2001b) auk þess sem samræmd próf í 10. bekk virðast byggjast á tveimur háðum undirliggjandi þáttum (Guðmundur Arnkelsson, 1994). Því er viðbúið að háðir þættir skýri gögnin betur en hornréttir.

## Aðferð

### Þátttakendur

Einn árgangur nemenda var notaður í rannsókninni, nemendur fæddir árið 1988. Þessir nemendur tóku samræmd próf í 4. bekk haustið 1997 og samræmd próf í 7. bekk haustið 2000. Haustið 1997 voru 4.495 nemendur á nemendaskrá Námsmatsstofnunar í 4. bekk. Af þessum fjölda tóku 4.320 nemendur samræmt próf í íslensku í 4. bekk og 4.343 í stærðfræði. Haustið 2000 voru 4.534 nemendur í 7. bekk samkvæmt nemendaskrá Námsmatsstofnunar. Af þessum fjölda tóku 4.377 nemendur samræmt próf í íslensku í 7. bekk og 4.402 í stærðfræði. Samtals eru 4.602 nemendur í þessum skráum Námsmatsstofnunar.

Í rannsókninni voru þáttgreindar einkunnir 4.003 nemenda sem fæddir eru árið 1988. Í úrvinnslunni voru eingöngu notaðar einkunnir nemenda sem tóku samræmd próf bæði í 4. og 7. bekk í stærðfræði og íslensku.

Samtals tóku 53 nemendur hvorki próf í 4. bekk né 7. bekk. Tveir nemendur tóku eitt próf í hvorum bekk fyrir sig en 494 tóku bæði prófin í öðrum hvorum bekknum en ekkert eða eitt próf í hinum bekknum. Af þeim nemendum sem taka ekkert próf hvorugt árið voru 33 undanþegnir próftöku. Samtals virðast 310 nemendur vera búsettir erlendis annað hvort árið og aðrir hafa verið veikir eða ekki mætt í að minnsta kosti eitt próf. Þátttakendur í rannsókninni eru því um 87% af þeim hluta 1988 árgangsins sem er á nemendaskrá Námsmatsstofnunar.

### Mælitæki

Í samræmda prófinu í stærðfræði í 4. bekk haustið 1997 eru þrjú prófþættir: (a) reikningur og aðgerðir, (b) rúmfræði og mælingar, og (c) tölur og talnaskilningur. Í samræmda íslenskuprófinu í 4. bekk haustið 1997 eru fjórir þættir: (a) stafsetning, (b) málnotkun, (c) lesskilningur, og (d) ritun. Nánari lýsing á samningu, efni og eiginleikum samræmdra prófa í 4. bekk haustið 1997, ásamt prófunum sjálfum, er að finna í Amalía Björnsdóttir, Arna Hauksdóttir, Finnbogi Gunnarsson og Inga Úlfisdóttir (1999).

Í samræmdu stærðfræðiprófi í 7. bekk haustið 2000 eru þrjú prófþættir: (a) reikningur og aðgerðir, (b) rúmfræði og mælingar, og (c) tölfræði. Í samræmda íslenskuprófinu í 7. bekk eru fjórir prófþættir: (a) stafsetning, (b) málfræði og málnotkun, (c) lesskilningur og hlustun, og (d) ritun. Nánari lýsing á samningu, efni og eiginleikum samræmdu prófanna í 7. bekk haustið 2000, ásamt prófunum sjálfum, er að finna í Sigurgrímur Skúlason, Finnbogi Gunnarsson, Rósa Einarsdóttir og Inga Úlfisdóttir (2001).

Meðaltal normaldreifðra einkunna í 4. og 7. bekk í stærðfræði og íslensku á landinu öllu er 5,0 og staðalfrávik 1,96. Í hópi þátttakenda í rannsókninni er meðaltal normaldreifðra einkunna í 4. bekk 5,02 bæði í íslensku og stærðfræði og staðalfrávik 1,94. Í 7. bekk er meðaltal í íslensku 5,02 og staðalfrávik 1,93 en í stærðfræði er meðaltal 5,06 og staðalfrávik 1,92. Af þessu leiðir að nánast enginn

munur er á árangri þátttakenda í rannsókninni og hópsins í heild sem þreytti samræmd próf í 4. bekk 1997 og 7. bekk 2000.

### Framkvæmd

Framkvæmd samræmdra prófa í 4. og 7. bekk hefur verið með sama sniði á því tímabili sem þessi rannsókn nær til. Prófin eru lögð fyrir í október ár hvert og taka um 120 mínútur í 4. bekk og 140 mínútur í 7. bekk. Prófað er í tveimur lotum með 20 mínútna hléi á milli. Prófin eru lögð fyrir í um það bil 170 grunnskólum með 4. eða 7. bekk. Ítarleg lýsing á framkvæmd prófanna í 4. og 7. bekk kemur fram í framkvæmdahefti á vefsíðu Námsmatsstofnunar (RUM, 2000).

### Úrvinnsla

Þátttakendur í rannsókninni svöruðu samtals 327 atriðum í samræmdum prófum í stærðfræði og íslensku í 4. og 7. bekk. Í 4. bekk haustið 1997 voru 76 atriði í íslenskuprófinu og 65 í stærðfræðiprófinu. Í 7. bekk haustið 2000 voru 118 atriði í íslenskuprófinu og 68 í stærðfræðiprófinu. Gefið var 0 fyrir rangt svar og 1 fyrir rétt svar í flestum atriðunum. Í nokkrum tilvikum voru þó gefin fleiri stig fyrir einstök atriði eða frá 0 til 4. Þetta á við í námsþættinum reikningi og aðgerðum í stærðfræði í 7. bekk og ritun í 7. bekk. Í ritun í 4. bekk var gefin ein einkunn á bilinu 0 til 10. Nánari lýsing á stigagjöf og einkunnastigum í prófunum kemur fram í Sigurgrímur Skúlason o.fl. (2001a) og Amalfa Björnsdóttir o.fl. (1999).

Vandamál við línulega þáttgreiningu tvískiptra breyta hefur lengi verið þekkt (Carroll, 1945; McDonald, 1985). Greiningin gerir ráð fyrir að frammistaða við einstök verkefni sé línulegt fall af undirliggjandi þáttum. Þessi forsenda brestur þegar verkefni eru mjög létt eða mjög þung. Það leiðir til þess að svokallaðir þyngdarþættir koma fram í þáttgreiningunni. Atriði sem radast í slíka þætti eiga það eitt sameiginlegt að vera að svipaðri þyngd fremur en að vera lík að efni

eða reyna á sams konar færni. Þess vegna verður að gera sérstakar ráðstafanir áður en slík gögn eru þáttgreind til að í koma í veg fyrir myndun þyngdarþátta.

Þyngdarþættir koma eingöngu fram í þáttgreiningu tvíkostabreyta. Við þáttgreiningu gagna af þessu tagi er algengast að sameina nokkur atriði, sem hvert um sig gefur 0 eða eitt stig, í stutta kvarða (Gorsuch, 1983). Þessi leið er farin hér. Þáttgreining gagnanna byggist á stuttum kvörðum sem hver um sig samanstendur af nokkrum atriðum eða prófspurningum.

Kvarðarnir samanstóðu allir af prófatriðum úr sama prófþætti. Hver kvarði var settur saman úr þremur til sex prófatriðum, en leitast var við að draga fjögur eða fimm atriði saman eftir því sem kostur var. Tekið var mið af fjölda og þyngd prófatriða í hverjum prófþætti þegar kvarðarnir voru myndaðir. Í 1. töflu kemur fram hvaða prófspurningar liggja að baki hverjum kvarða.

Dæmi um þessa aðferð er skipting 15 fjölvalsspurninga í prófhlutanum Rúmfræði og mælingar í 7. bekk í fjóra stutta kvarða. Þyngsta prófatriðið var sett í einn kvarða, annað þyngsta í annan, þriðja þyngsta í þann þriðja og loks hið fjórða þyngsta í fjórða kvarðann. Fimmta þyngsta prófatriðið var síðan sett í fyrsta kvarðann og svo koll af kolli.

Þegar stuttir kvarðar höfðu verið myndaðir með þessum hætti fyrir öll atriði prófanna í stærðfræði og íslensku í 4. og 7. bekk var reiknuð fylgni á milli kvarðanna. Þetta fylgnifylki var síðan þáttgreint og var forritið SPSS 10.0.5 notað til verksins.

## Niðurstöður

Skríðupróf Cattells gaf til kynna að draga ætti tvo til fjóra þætti í þáttgreiningunni (*maximum-likelihood*). Samhliðagreining (*parallell analysis*) með 20 endurtekningum (*iterations*) gaf til kynna fjóra þætti. Aðrar

1. tafla. Efni stuttra kvarða sem notaðir voru í þáttgreiningu.

Bekkur	Fag <sup>a</sup>	Náms- þáttur	Númer kvarða	Prófhefti <sup>b</sup>	Bls.	Númer spurninga í prófi	Tegund spurninga
4	Ísl.	Lesskilningur	1	3	2-4	1-6	Fjölval
4	Ísl.	Lesskilningur	2	3	4-6	1-5	Fjölval
4	Ísl.	Lesskilningur	3	3	6-7	1-4	Fjölval
4	Ísl.	Lesskilningur	4	3	8-10	1-6	Fjölval
4	Ísl.	Málnotkun	5	2	6-7	1-4	Fjölval
4	Ísl.	Málnotkun	6	2	6-7	5-7	Fjölval
4	Ísl.	Málnotkun	1	2	2-3	4, 5, 7, 8	Fjölval
4	Ísl.	Málnotkun	2	2	2-3	1, 2, 3, 6	Fjölval
4	Ísl.	Málnotkun	3	2	4-5	1, 3, 4, 7	Fjölval
4	Ísl.	Málnotkun	4	2	4-5	2, 5, 6, 8	Fjölval
4	Ísl.	Ritun <sup>c</sup>	1	3	11-12	-	Ritgerð
4	Ísl.	Stafsetning	1	1	2-3	6, 17, 18, 19, 20	Eyðufyllingar
4	Ísl.	Stafsetning	2	1	2-3	2, 23, 26, 27, 29, 30	Eyðufyllingar
4	Ísl.	Stafsetning	3	1	2-3	1, 3, 7, 8, 13, 16	Eyðufyllingar
4	Ísl.	Stafsetning	4	1	2-3	5, 9, 11, 14, 15, 25	Eyðufyllingar
4	Ísl.	Stafsetning	5	1	2-3	4, 10, 21, 22, 14, 28	Eyðufyllingar
4	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	1	1	8-12	16, 24, 25, 26, 29	Opin sp.
4	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	2	1	8-12	22, 23, 17, 18, 33	Opin sp.
4	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	3	1	8-12	18, 19, 20, 31, 32	Opin sp.
4	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	4	1	8-12	17, 21, 32, 30	Opin sp.
4	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	5	2	7-12	51, 53, 54, 58	Opin sp.
4	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	6	2	7-12	56, 59, 60, 61	Opin sp.
4	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	7	2	7-12	52, 55, 64, 65	Opin sp.
4	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	8	2	7-12	50, 57, 62, 63	Opin sp.
4	Stæ.	Rúmfr. og mælingar	1	1	4-7	9, 8, 12, 15	Fjölval
4	Stæ.	Rúmfr. og mælingar	2	1	4-7	10, 11, 13, 14	Fjölval
4	Stæ.	Rúmfr. og mælingar	3	2	5-7	43, 44, 48, 49	Fjölval
4	Stæ.	Rúmfr. og mælingar	4	2	5-7	45, 46, 47	Fjölval
4	Stæ.	Tölur og talnaskiln.	1	1	1-3	1, 3, 4, 7	Fjölval
4	Stæ.	Tölur og talnaskiln.	2	1	1-3	2, 5, 6	Fjölval
4	Stæ.	Tölur og talnaskiln.	3	2	2-4	35, 36, 40, 41, 42	Fjölval
4	Stæ.	Tölur og talnaskiln.	4	2	2-4	34, 37, 38, 39	Fjölval
7	Ísl.	Hlustun	1	1	3	4, 7, 9, 13	Fjölval
7	Ísl.	Hlustun	2	1	3	1, 5, 8, 12	Fjölval
7	Ísl.	Hlustun	3	1	3	2, 3, 6, 11	Fjölval
7	Ísl.	Lesskilningur	1	2	3	1-6	Fjölval
7	Ísl.	Lesskilningur	2	2	2	1-4	Fjölval
7	Ísl.	Lesskilningur	3	2	4-5	1-6	Fjölval
7	Ísl.	Lesskilningur	4	2	6-7	1-6	Fjölval
7	Ísl.	Lesskilningur	5	2	8-9	2, 4, 7, 8	Fjölval
7	Ísl.	Lesskilningur	6	2	8-9	1, 3, 5, 6	Fjölval
7	Ísl.	Málnotkun	1	1	4	1-6	Eyðufyllingar
7	Ísl.	Málnotkun	2	1	5	1, 2, 5, 7	Fjölval
7	Ísl.	Málnotkun	3	1	5	3, 4, 6, 8	Fjölval
7	Ísl.	Málnotkun	4	1	6	1-6	Fjölval
7	Ísl.	Málnotkun	5	1	7	3, 6, 7, 8, 9	Fjölval
7	Ísl.	Málnotkun	6	1	7	1, 2, 4, 5, 10	Fjölval

## 1. tafla frh. Efni stuttra kvarða sem notaðir voru í þáttagreiningu.

7	Ísl.	Málnotkun	7	1	8	2, 6, 7, 8	Fjölval
7	Ísl.	Málnotkun	8	1	8	1, 2, 3, 5	Fjölval
7	Ísl.	Ritun <sup>d</sup>	1	2	10-11	-	Ritgerð
7	Ísl.	Ritun <sup>d</sup>	2	2	10-11	-	Ritgerð
7	Ísl.	Stafsetning	1	1	2	1a, 3a, 3b, 6, 8, 9	Eyðufyllingar
7	Ísl.	Stafsetning	2	1	2	1d, 6a, 8d, 13, 14a, 15	Eyðufyllingar
7	Ísl.	Stafsetning	3	1	2	4a, 5b, 8b, 8c, 8e, 11,	Eyðufyllingar
7	Ísl.	Stafsetning	4	1	2	1c, 4b, 10a, 10c, 14b, 17	Eyðufyllingar
7	Ísl.	Stafsetning	5	1	2	1b, 2, 5a, 10a, 10d, 12	Eyðufyllingar
7	Stæ.	Líkindi og tölfærði	1	3	3	15a, 16b, 17, 18b, 19c	Fjölval
7	Stæ.	Líkindi og tölfærði	2	3	3	15b, 16a, 18a, 19a, 19b	Fjölval
7	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	1	1	1	6, 9, 13	Opin sp.
7	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	2	1	1	3, 10, 12	Opin sp.
7	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	3	1	1	2, 14a, 14b, 15a, 15b	Opin sp.
7	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	4	1	1	1b, 4b, 5b, 7a, 8b, 11a	Opin sp.
7	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	5	1	1	1a, 2, 5a, 7b, 8a, 11b	Opin sp.
7	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	6	2	2	2a, 2c, 6, 7b	Opin sp.
7	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	7	2	2	1b, 1c, 5, 7a	Opin sp.
7	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	8	2	2	2b, 4a, 4b, 9	Opin sp.
7	Stæ.	Reikn. og aðgerðir	9	2	2	1a, 3, 8	Opin sp.
7	Stæ.	Rúmfr. og mælingar	1	3	3	4b, 7a, 7b, 7c	Fjölval
7	Stæ.	Rúmfr. og mælingar	2	3	3	2, 3, 9, 11a, 14	Fjölval
7	Stæ.	Rúmfr. og mælingar	3	3	3	4a, 6, 11b, 12, 13a	Fjölval
7	Stæ.	Rúmfr. og mælingar	4	3	3	5a, 5b, 8, 10, 13b	Fjölval

<sup>a</sup> Ísl. = Íslenska; Stæ. = Stærðfræði.

<sup>b</sup> Próffhefti er hægt að nálgast á vefsíðu Námsmatsstofnunar (<http://www.namsmat.is>)

<sup>c</sup> Ein einkunn gefin á kvarðanum 0 til 10.

<sup>d</sup> Ein ritgerð sem metin er með sjö kvörðum. Hér samanstendur kvarði 1 af mati á skrift og frágangi, málfari, frásögn og stafsetningu, en kvarði 2 af mati á uppbyggingu ritgerðar (byrjun, meginmál og niðurlag).

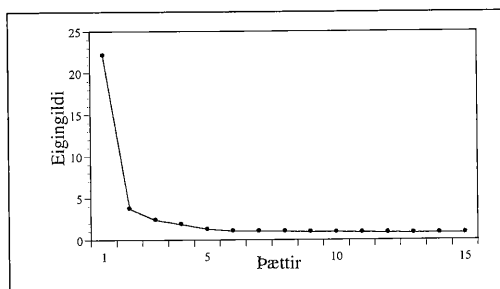
aðferðir við þáttagreiningu gagnanna (*principal components, principal axis factoring, alpha*) gáfu hliðstæðar niðurstöður og greining byggð á aðferð mestu líkinda (*maximum likelihood*). Auk þessa voru ólíkar þáttalausnir skoðaðar nánar til að ákvarða fjölda þátta.

Eins og sést á 1. mynd kemur til greina að velja tvo til fjóra þætti á grundvelli skriðuprófsins. Tvær leiðir voru farnar til að ákvarða þann fjölda þátta sem lýsir gögnunum

best. Í fyrsta lagi voru skoðaðar fylgnileifar<sup>2</sup> (*residual correlations*) og í öðru lagi stöðugleiki þátta með mismunandi aðferðum við þáttagreininguna.

Þegar fylgnileif tveggja þátta lausnar voru skoðaðar kom fram mikill munur milli raunfylgni breyta og þeirrar fylgni sem þáttagreiningin gaf til kynna. Þetta bendir til þess að tveir þættir lýsi illa tengslum breytanna. Í þriggja þátta lausn voru frávikin færri og ekki tengd einum prófþætti umfram

<sup>2</sup> Með fylgnileif er átt við mismuninn milli raunfylgni breyta og þeirrar fylgni sem þáttalíkanið gefur til kynna.



1. mynd. Skriðupróf sem sýnir 15 hæstu eigingildi fylgnifykisins.

aðra. Tiltölulega lítil breyting varð á þessu við að velja fjóra þætti í stað þriggja.

Þegar mismunandi aðferðir voru notaðar við þáttagreiningu gagnanna (*principal components, principal axis, alpha factoring og maximum likelihood*), og ólíkar aðferðir við snúning, reyndist fjögurra þátta lausn taka mestum breytingum frá einni aðferð til annarrar. Sérstaklega var breytilegt eftir aðferðum hvaða kvarðar lentu í fjórða þætti. Fyrstu þrjú þættirnir voru aftur á móti svipaðir, óháð þeirri aðferð sem var notuð við þáttagreininguna. Þeir voru jafnframt í meginatriðum þeir sömu og þegar aðeins voru dregnir þrjú þættir. Þriggja þátta lausn lýsir því gagnasafninu best og var valin hér.

Niðurstöður samræmdra prófa gefa til kynna tengsl milli íslensku og stærðfræði, bæði þegar tengsl prófþátta eru skoðuð í 4. og 7. bekk (Sigurgrímur Skúlaason o.fl. 2001a; 2001b) og þegar niðurstöður samræmdra prófa í 10. bekk eru þáttagreindar (Guðmundur Arnkelsson, 1994). Því var búist við að háður þáttasnúningur hentaði þessum gögnum betur en óháður (hornréttur) snúningur. Þar sem hornréttir snúningar eru að jafnaði einfaldari í túlkun voru þó einnig athugaðar niðurstöður hornrétttra snúninga. Sterk tengsl breyta við alla þætti þóttu gera þáttabyggingu þessara lausna óskýra.

Í 2. töflu er sýnd þriggja þátta lausn með aðferð mestu líkinda (*maximum-likelihood*). Fyrsti þátturinn einkennist af kvörðum sem voru gerðir úr prófatriðum stærðfræðiprófanna í 4. og 7. bekk. Á þessu er ein undan-

teking. Einn kvarði, 3. kvarði í lesskilningi í 4. bekk, þar sem reynir á töflulestur, hefur nokkuð vægi á þáttinn. Þegar efni þessa kvarða er athugað kemur í ljós að prófatriði hans tengjast öll lestri á töflum.

Mest vægi á fyrsta þáttinn hafa kvarðar úr prófþættinum Reikningi og aðgerðum í 4. bekk. Almenn á við að kvarðar sem myndaðir eru úr námsþáttum 4. bekkjar stærðfræðiprófsins hafa meira vægi á þáttinn en kvarðar úr námsþáttum 7. bekkjar stærðfræðiprófsins. Þessum þætti er gefið heitið Stærðfræðiþáttur.

Þáttur II (2. tafla) samanstendur af kvörðum úr stafsetningarhlutum og ritun í 4. og 7. bekk. Mest vægi á þennan þátt hafa kvarðar sem byggjast á prófatriðum úr stafsetningu í 4. bekk. Þar á eftir koma kvarðar úr stafsetningarhluta í 7. bekk. Í samræmi við efni kvarðanna, sem vega hæst á þátt II, er hann nefndur Stafsetning og ritun.

Kvarðar úr námsþáttunum Málnotkun og Lesskilningur í 4. og 7. bekk vega hæst á þriðja þáttinn. Þáttur III er því nefndur Lesskilningur og málnotkun.

Flestir kvarðar (67 af 71 kvarða) hafa afgerandi vægi á aðeins einn þessara þriggja þátta. Einnig hafa kvarðarnir í langflestum tilvikum (67 af 71 kvarða) mest vægi á þann þátt sem er viðeigandi miðað við þann prófþátt sem verkefni koma úr. Þannig hafa öll stærðfræðiverkefni hæst vægi á þátt I (Stærðfræði), stafsetningar- og ritunarverkefni hafa öll hæst vægi á þátt II (Stafsetning og ritun). Flest verkefni í Lesskilningi og Málnotkun (23 af 27 kvörðum) hafa hæst vægi á þátt III (Lesskilningur og málnotkun). Þessar niðurstöður gefa almennt til kynna að þátta-lausnin gefi fullnægjandi lýsingu á inntaki verkefna í samræmdum könnunarprófum í 4. og 7. bekk.

Sú aðferð sem var notuð við snúning þátta (*promax*) leyfir fylgni á milli þeirra og reyndist hún umtalsverð. Fylgni á milli þátta I (Stærðfræði) og II (Stafsetning, ritun) var 0,60, milli I og III (lesskilningur, málnotkun) 0,71 og milli þátta II og III 0,61.

Á þriggja þátta lausn eru ákveðin frávik

## 2. tafla. Þáttafylki þriggja þátta lausnar með aðferð mestu líkinda (ML) og promax snúningi.

Nafn námsþáttar	Bekkur	Númer kvarða	Þættir			h <sup>2</sup>
			I Stærðfræði	II Stafsetning ritun	III Lesskilningur málnotkun	
Reikn. og aðgerðir	4	3	0,84	0,09	-0,18	0,76
Reikn. og aðgerðir	4	2	0,77	0,09	-0,12	0,66
Reikn. og aðgerðir	4	1	0,75	0,04	-0,11	0,58
Tölur og talnaskilningur	4	3	0,69	0,00	-0,03	0,47
Tölur og talnaskilningur	4	2	0,68	-0,01	-0,05	0,46
Reikn. og aðgerðir	4	4	0,66	0,16	-0,17	0,55
Reikn. og aðgerðir	4	6	0,65	0,04	-0,02	0,45
Tölur og talnaskilningur	4	4	0,65	0,03	0,00	0,45
Reikn. og aðgerðir	4	5	0,63	0,13	-0,11	0,49
Reikn. og aðgerðir	4	7	0,62	0,01	-0,05	0,39
Tölur og talnaskilningur	4	1	0,61	0,08	-0,04	0,43
Reikn. og aðgerðir	7	3	0,57	-0,09	0,27	0,59
Reikn. og aðgerðir	4	8	0,57	0,00	-0,07	0,32
Lesskilningur	4	3	0,54	0,01	0,05	0,34
Reikn. og aðgerðir	7	4	0,54	-0,05	0,26	0,54
Rúmfræði og mælingar	4	2	0,54	-0,02	0,10	0,37
Reikn. og aðgerðir	7	2	0,51	-0,01	0,14	0,37
Rúmfræði og mælingar	7	1	0,51	-0,03	0,20	0,43
Rúmfræði og mælingar	4	1	0,50	0,09	-0,05	0,31
Reikn. og aðgerðir	7	8	0,46	-0,02	0,26	0,44
Reikn. og aðgerðir	7	6	0,45	-0,05	0,22	0,38
Líkindi og tölfræði	7	1	0,44	-0,06	0,33	0,49
Reikn. og aðgerðir	7	5	0,43	-0,04	0,32	0,47
Rúmfræði og mælingar	4	3	0,42	0,01	0,08	0,23
Rúmfræði og mælingar	7	3	0,42	-0,03	0,29	0,42
Líkindi og tölfræði	7	2	0,41	-0,14	0,37	0,49
Rúmfræði og mælingar	4	4	0,40	-0,03	0,07	0,20
Rúmfræði og mælingar	7	4	0,39	-0,02	0,28	0,37
Reikn. og aðgerðir	7	1	0,39	0,03	0,26	0,38
Reikn. og aðgerðir	7	7	0,37	0,03	0,20	0,30
Rúmfræði og mælingar	7	2	0,37	-0,06	0,36	0,44
Reikn. og aðgerðir	7	9	0,35	-0,05	0,20	0,25
Stafsetning	4	3	0,12	0,87	-0,18	0,86
Stafsetning	4	2	0,06	0,83	-0,11	0,74
Stafsetning	4	1	0,10	0,82	-0,14	0,76
Stafsetning	4	5	0,07	0,79	-0,10	0,68
Stafsetning	7	5	-0,04	0,74	0,11	0,66
Stafsetning	4	4	0,18	0,74	-0,15	0,71
Stafsetning	7	2	-0,07	0,73	0,08	0,61
Stafsetning	7	4	-0,08	0,69	0,09	0,55
Stafsetning	7	1	-0,05	0,65	0,10	0,51
Ritun	7	1	-0,05	0,62	0,14	0,51



## 2. tafla frh. Þáttafylki þriggja þátta lausnar með aðferð mestu líkinda (ML) og promax snúningi.

Nafn námsþáttar	Bekkur	Númer kvarða	Þættir			h <sup>2</sup>
			I	II	III	
			Stærðfræði	Stafsetning ritun	Lesskilningur málnotkun	
Stafsetning	7	3	-0,04	0,61	0,10	0,46
Ritun	4	1	0,05	0,59	0,03	0,41
Málnotkun	7	1	-0,06	0,42	0,40	0,54
Málnotkun	4	3	0,09	0,31	0,26	0,33
Ritun	7	2	-0,03	0,30	0,20	0,20
Málnotkun	4	4	0,02	0,27	0,25	0,23
Málnotkun	7	7	-0,11	0,16	0,59	0,48
Lesskilningur	7	6	-0,09	0,10	0,59	0,43
Lesskilningur	7	5	0,03	0,02	0,56	0,35
Málnotkun	7	8	-0,11	0,08	0,54	0,34
Lesskilningur	7	4	0,03	0,03	0,52	0,31
Lesskilningur	4	1	0,01	0,17	0,48	0,37
Málnotkun	7	4	-0,02	0,18	0,47	0,36
Lesskilningur	4	4	0,01	0,22	0,46	0,39
Hlustun	7	1	0,06	-0,16	0,46	0,23
Lesskilningur	7	1	0,02	0,10	0,44	0,27
Hlustun	7	3	0,04	-0,18	0,42	0,17
Málnotkun	4	6	0,05	0,10	0,42	0,27
Lesskilningur	4	2	0,12	0,21	0,40	0,41
Málnotkun	4	5	-0,02	0,05	0,40	0,19
Málnotkun	7	5	-0,04	0,19	0,38	0,27
Málnotkun	7	6	-0,01	0,17	0,38	0,25
Lesskilningur	7	2	0,08	-0,10	0,34	0,15
Málnotkun	7	2	0,10	0,21	0,33	0,32
Lesskilningur	7	3	0,26	-0,05	0,32	0,28
Hlustun	7	2	0,00	0,12	0,28	0,13
Málnotkun	4	1	0,05	0,17	0,23	0,16
Málnotkun	7	3	0,14	0,17	0,21	0,20
Málnotkun	4	2	0,07	0,18	0,18	0,14

Aths. Þættir dregnir með aðferð mestu líkinda (*maximum likelihood*) og fylgt eftir með promax snúningum (*Kaiser normalization*). Sjö endurtekningar (*iterations*) þurfti við snúninga.

sem koma fram í 1. töflu. Fyrst ber að nefna að sumir kvarðar í stærðfræði í 7. bekk hafa umtalsvert vægi á þriðja þátt, Lesskilning og málnotkun. Í sumum tilvikum hafa þeir litlu minna vægi heldur en á fyrsta þáttinn. Þegar efni þessara kvarða er skoðað kemur í ljós að prófatriðin byggjast á orðadæmum. Því má gera ráð fyrir að nokkuð reyni á lesskilning

við úrlausn þessara verkefna.

Fjórir kvarðar, sem allir byggjast á prófatriðum úr Málnotkun í 4. eða 7. bekk, hafa ekki afgerandi vægi á einn þátt fremur en annan. Vægi þeirra er svipað bæði á þátt II og III en í flestum tilfellum er vægið tiltölulega lágt. Þetta getur bent til þess að þættirnir þrír lýsi ekki á fullnægjandi hátt innbyrðistengsl-

um allra prófverkefna á samræmdu prófunum í 4. og 7. bekk. Einnig er hugsanlegt að í þessa kvarða hafi raðast verkefni með tiltölulega ónákvæma mælingu á viðkomandi færni. Að síðustu er hugsanlegt að þessi verkefni mæli tiltölulega sérhæfða færni sem eigi sér ekki hliðstæðu í þáttunum þremur né innbyrðis í viðkomandi kvörðum. Síðari möguleikarnir tveir eru í samræmi við það að þessir kvarðar röðuðust ekki saman í fjórða þáttinn þegar ólíkar aðferðir voru notaðar við greiningu gagnanna. Þetta bendir til þess að þrjú þættir lýsi gögnunum vel og liggi að baki frammistöðu nemenda á samræmdum prófum í 4. og 7. bekk. Einkennist einn þeirra af prófverkefnum er reyna á stærðfræði, annar á prófverkefnum er reyna á stafsetningu og ritun en sá síðasti af prófverkefnum er reyna á lesskilning og málnotkun.

Skýrð dreifing einstakra breyta (*communalities, h<sup>2</sup>*) eftir snúning er að meðaltali 0,41 og liggur á bilinu frá 0,13 til 0,86. Því er ljóst að sumar breytur eru lítt skýrðar af þáttunum þremur (6 eru undir 0,20). Má þar til dæmis benda á lesskilning og hlustun í 7. bekkjar prófinu og nokkrar breytur í málnotkun í 4. bekkjar prófinu (2. tafla).

## Umræða

Meginniðurstaða rannsóknarinnar styður réttmæti samræmdra prófa í 4. og 7. bekk til að álykta um framfarir nemenda yfir þriggja ára tímabil. Út frá niðurstöðum rannsóknarinnar er því réttlætjanlegt að meta framfarir nemenda í heild í stærðfræði og íslensku og í þeim námsþáttum sem bera sömu nöfn í prófunum í 4. og 7. bekk í íslensku.

Þrjú þættir lýsa best þeirri færni sem liggur til grundvallar frammistöðu nemenda á samræmdum prófum í 4. bekk árið 1997 og 7. bekk árið 2000: (a) Stærðfræði, (b) Stafsetning og ritun, og (c) Lesskilningur og málnotkun. Samsetning þessara þátta er svipuð óháð þeirri aðferð sem er notuð við þáttagreininguna.

Samning samræmdra prófa miðast við að meta tiltekna námsþætti í stærðfræði og íslensku. Þess vegna var reiknað með því að sérstakir námsþættir kæmu fram í þáttagreiningunni bæði í stærðfræði og íslensku. Þetta gengur eftir í íslensku þar sem tveir námsþættir koma fram sem aðgreinanlegir þættir í þáttagreiningunni. Með hliðsjón af hliðstæðri færni sem liggur til grundvallar stafsetningu og ritun annars vegar og lesskilningi og málnotkun hins vegar kemur ekki á óvart að þessir námsþættir fari saman. Aftur á móti var búist við því að sérstakir þættir kæmu einnig fram í stærðfræði. Það gekk aftur á móti ekki eftir.

Aðeins einn þáttur kemur fram sem allir námsþættir stærðfræðiprófanna í 4. og 7. bekk hlaða á. Skýring á þessari niðurstöðu er ekki augljós. Aftur á móti koma fram vísbendingar í niðurstöðunum um hvað gæti legið hér til grundvallar.

Þegar vægi einstakra kvarða í stærðfræði á þættina þrjú er skoðað kemur í ljós að sumir kvarðar í stærðfræði í 7. bekk hafa nokkuð vægi á þriðja þáttinn, lesskilning og málnotkun. Í nokkrum tilvikum hafa þeir litlu minna vægi heldur en á fyrsta þáttinn. Aftur á móti er vægi kvarða, sem myndaðir eru úr verkefnum úr stærðfræðiprófunum, hverfandi á annan þáttinn, stafsetningu og ritun. Verkefni margra þessara kvarða úr stærðfræðiprófunum felast í orðadæmum og því ljóst að nokkuð reynir á lesskilning við úrlausn þeirra. Þetta er einkum áberandi fyrir kvarða sem settir eru saman úr prófatriðum úr prófþættinum Reikningur og aðgerðir og prófþættinum Rúmfræði og mælingar í 7. bekk. Hér er því komið tilefni til að huga sérstaklega að þessu við samningu stærðfræðiprófsins í 7. bekk því lestrarfærni gæti vegið of þungt í frammistöðu nemenda. Að svo miklu leyti sem þetta á við er það óæskilegt bæði út frá próffræðilegum sjónarmiðum og sanngirniskröfum að sama kunnáttusvið sé metið í prófum á jafn ólíkum námsgreinum og stærðfræði og íslensku.

Niðurstöðurnar hafa augljóst hagnýtt gildi í skólaþróun og eftirliti með námsframvindu

nemenda. Styrkur markvissrar notkunar upplýsinga af þessu tagi liggur í því að hægt er að bregðast við námsframvindu allra nemenda óháð því hvort námsárangur þeirra telst slakur, í meðallagi eða góður miðað við aðra nemendur. Námsstaða nemandans í 4. bekk er tekin sem viðmiðun fyrir námsframfarir hans á þriggja ára tímabili. Hér er því komin leið til að sinna þörfum allra nemenda í árgangi en ekki eingöngu þeirra sem búa við sérhæfðan námsvanda eða afmarkaða námserfiðleika. Jafnframt geta skólastjórnendur skoðað námsframfarir nemendahópa með mismunandi námsárangur og metið hvernig þeim vegnar á þriggja ára tímabili miðað við hliðstæða nemendahópa á landinu öllu.

Undanfarin tvö ár hefur Námsmatsstofnun sent skólum upplýsingar um námsframfarir nemenda milli 4. og 7. bekkjar (Einar Guðmundsson og Guðmundur B. Arnkelsson, 2001). Með hliðsjón af niðurstöðum þessarar rannsóknar er mikilvægt að festa þetta starf í sessi og gera starfsfólki grunnskóla landsins þannig mögulegt að nýta sér þessar upplýsingar með markvissum hætti. Jafnframt er nauðsynlegt að gera hliðstæða rannsókn á námsframförum nemenda milli 7. og 10. bekkjar og athuga hvort forsendur fyrir mati á námsframförum nemenda haldi þar einnig.

Allar upplýsingar sem lúta að því að hvaða marki einkunnir endurspegla þá eiginleika eða hugsmíð sem prófum er ætlað að mæla eru mikilvægar til að meta réttmæti prófa (Messick, 1989). Þessar niðurstöður styðja því einnig réttmæti einkunna á hvoru samræmdu prófanna í 4. og 7. bekk fyrir sig. Hvort próf um sig er samið með það að markmiði að leggja mat á stöðu nemenda á tilteknum námsmarkmiðum sem þættir prófanna endurspegla. Þessar niðurstöður sýna að einkunnir á tilteknum námsþáttum tengjast sömu einkunnum á sömu námsþáttum nokkrum árum fyrr eða síðar á námsferli nemenda. Þær styðja því það að prófin leggi mat á þá námsþætti sem þeim er ætlað.

### Aftanmálgrein

Fyrirspurnir um efni greinarinnar og óskir um sérprent skal beina til Einars Guðmundssonar ([einarg@hi.is](mailto:einarg@hi.is)), Sigurgríms Skúlasonar ([sigsk@namsmat.is](mailto:sigsk@namsmat.is)) eða Guðmundar B. Arnkelssonar ([guðmuarn@hi.is](mailto:guðmuarn@hi.is)).

## Abstract

In the study one of two main assumptions underlying reports of students progress between grade four (9 year olds) and seven (12 year olds) on the Icelandic Nationwide examinations was investigated. The Nationwide examinations are administered to cohorts of students in grade four and seven in mathematics and mother tongue. In this study the validity of the assumption that the same knowledge domains are tested on both occasions on different tests was investigated. Scores from the fourth and seventh grade tests of 4003 students born in 1988 were factor analysed with a maximum-likelihood procedure and a promax rotation. Three factors emerged from the factor analysis: (a) mathematics, (b) spelling and writing, and (c) reading comprehension and language usage. Communalities for individual variables after rotation ranged from 0,13 to 0,86 (mean 0,41). The results support the validity of using scores from the Nationwide Examinations in Iceland to report on students' progress in mathematics and mother tongue over a three year period.

## Heimildaskrá

Amalía Björnsdóttir, Arna Hauksdóttir, Finnbogi Gunnarsson og Inga Úlfisdóttir (1999). *Samræmd könnunarpróf í 4. bekk 1997*. Reykjavík: Rannsóknastofnun uppeldis- og menntamála.

- Carroll, J. B. (1945). The effect of difficulty and chance success on correlations between items or between tests. *Psychometrica*, 10, bls. 1-19.
- Einar Guðmundsson og Guðmundur B. Arnkelsson (2001). Námsframfarir nemenda milli 4. og 7. bekkjar grunnskóla. Óbirt handrit.
- Fabrigar, L.R., Wegener, D.T., MacCallum, R.C. og Strahan, E.J. (1999). Evaluating the use of exploratory factor analysis in psychological research. *Psychological Bulletin*, 4, 272-299.
- Gorsuch, R. L. (1983). *Factor analysis* (2. útgáfa). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Guðmundur B. Arnkelsson (1994). Athugun á samræmdum loka-prófum grunnskóla: Þáttauppbygging og próffræðilegir eiginleikar. *Uppeldi og menntun: Tímarit Kennaraháskóla Íslands*, 3, 83-102.
- McDonald, R. P. (1985) *Factor analysis and related methods*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Messick, S. (1989). Validity. Í R. L. Linn (Ritstj.) *Educational measurement* (3. útgáfa). Washington, DC: American Council on Education.
- Rannsóknastofnun uppeldis- og menntamála [RUM] (2000). *Samræmd könnunarpróf í 4. og 7. bekk. Framkvæmd*. Reykjavík: Höfundur. [www.namsmat.is]
- Sigurgrímur Skúlason, Finnbogi Gunnarsson og Helga Kristinsdóttir (2001a). Samræmd próf 10: Samræmd könnunarpróf í 4. bekk 1998. Reykjavík: Rannsóknastofnun uppeldis- og menntamála. [www.namsmat.is]
- Sigurgrímur Skúlason, Finnbogi Gunnarsson og Helga Kristinsdóttir (2001b). Samræmd próf 11: Samræmd könnunarpróf í 7. bekk 1998. Reykjavík: Rannsóknastofnun uppeldis- og menntamála. [www.namsmat.is]
- Sigurgrímur Skúlason, Finnbogi Gunnarsson, Rósa Einarsdóttir og Inga Úlfisdóttir (2001). *Skýrsla um samræmd próf í 7. bekk 2000*. Reykjavík: Rannsóknastofnun uppeldis- og menntamála. [www.namsmat.is]
- Zwick, W. R., og Velicer, W. F. (1986). Comparison of five rules for determining the numbers of components to retain. *Psychological Bulletin*, 99, bls. 432-442.